**习题六**

【1】求下列二次型的矩阵并求出二次型的秩：

（1）；

（2）；

（3）.

【解答】根据二次型矩阵的定义，我们容易得到

（1），进行行变换，有，故.

（2），进行行变换，有，故.

（3）



故得到矩阵为



进行化简（第一行加到第二行，第二行加到第三行…）我们有



显然我们有.

【2】设为实矩阵，为二次型



证明：二次型的矩阵为.

【解答】令，则



即对应的矩阵为.

【3】已知二次型的矩阵如下，试写出对应的二次型：

（1）；（2）；（3）.

【解答】容易得到（1）；

（2）.

（3）

合并一下有.

【4】用正交替换化下列二次型为标准型，并求出所用的正交替换.

（一）；

（二）；

（三）.

解答:（一）先写出二次型的矩阵如下：



（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由



可以得到的特征值为.计算特征向量，得到



这三个向量本就正交，我们只需要做单位化即可.可以得到：



故正交对角化后有：



故，正交替换为



（二）先写出二次型的矩阵如下：



（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由



可以得到的特征值为.计算特征向量，得到



我们需要对第一个和第二个向量正交化，有



从而单位化后可以得到：



故正交对角化后有：



故，正交替换为



（三）先写出二次型的矩阵如下：



（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由



可以得到的特征值为.计算特征向量，得到



我们需要对第一个和第二个向量正交化，有



从而单位化后可以得到：



故正交对角化后有：



故，正交替换为



【5】用配方法化下列二次型为标准形，并求出所作的非奇异线性替换：

（1）；

（2）；

（3）.

【解答】（1）注意到



故令，故.



显然这是非奇异线性替换.

（2），先令，则



再令，则得到，线性替换为



容易知道对应矩阵的行列式不为零，故为非奇异线性替换.

（3）



令，则.

则线性替换为



这是非奇异线性替换.

【6】设对称矩阵合同于，证明是对称矩阵.

【解答】合同于，即存在可逆矩阵满足



因为为对称矩阵，故.则，故



故是对称矩阵.

【7】设矩阵和都合同于，证明矩阵合同于.

【解答】矩阵和都合同于，则存在可逆矩阵，使得



即.我们变形，有



显然矩阵是可逆的，故矩阵合同于.

【8】证明任一实对称矩阵都合同于对角矩阵.

【解答】这是显然的，我们根据P200**定理5.3**可知实对称矩阵一定可以正交相似对角化，即存在正交矩阵，对实对称矩阵有，其中为对角线上是特征值的对角矩阵.定理的证明如下：

对于阶实对称矩阵，存在正交矩阵满足



其中是一个对角矩阵，这里为的特征值.

对矩阵的阶数使用数学归纳法.当时，结论显然成立.

归纳假设，当时结论成立，则考虑是阶实对称矩阵，则我们一定可以找到一个向量满足，我们可以将其扩张为一组标准正交向量组（可以看作是的一组正交基）.令



根据正交矩阵的性质：方阵正交的充要条件是的行（列）向量组是单位正交向量组，则我们容易知道是一个正交矩阵.

从而我们做如下矩阵乘法，可以得到一个分块矩阵如下.



其中是阶的实对称矩阵，根据归纳假设，存在阶正交矩阵使得



令，则为正交阵.则我们有



令，则正交，且.

【9】设矩阵合同于，合同于，则合同于.

【解答】即存在可逆矩阵满足



则我们有



而我们容易证明，故合同于.

【10】证明：任一阶实对称矩阵都合同于对角阵



其中，为的正惯性指数.

【解答】该证明需要用到**惯性定理**.我们可以用非奇异线性替换将化为规范形，根据惯性定理可以知道是根据唯一确定的.而规范型对应于对角矩阵



故实对称矩阵也合同于该矩阵.

【11】证明：阶实对称矩阵合同于的充分必要条件为，且和的正惯性指数相等.

【解答】首先给出惯性指数的定义.设二次型，经非奇异线性替换化为标准形.若的标准型有个正项，则称为二次型或实对称矩阵的正惯性指数.又称和分别为二次型或实对称矩阵的负惯性指数和符号差.此题中，且和的正惯性指数相等，则和的所有正负惯性指数皆相同，即二者有着相同的规范形.

先证明充分性

是两个实对称矩阵，设他们有相同的惯性指数，则有相同的规范形，记作,即存在可逆矩阵使得



则有



所以合同.

再证明必要性：设是两个合同的实对称矩阵，即存在使得.有与其规范式合同,即



所以,即,此即表示也合同于规范式.所以有相同的规范式，即有相同的正负惯性指数.综上所述，证毕!

【12】证明二次型的符号差与的秩的奇偶性相同.

【解答】根据惯性定理，我们有，则



显然为偶数，故的奇偶性相同.

【13】判断下列二次型是否为正定二次型

（1）；

（2）；

（3）.

【解答】

（1）写出二次型的矩阵，如下



判断是否正定，只需要判断各阶顺序主子式.显然的，有



故不是正定二次型.

（2）写出二次型的矩阵，如下



判断是否正定，只需要判断各阶顺序主子式.显然的，有



显然是正定二次型.

（3）写出二次型的矩阵，如下



同【14】（3），故该二次型正定，证明见下.

【14】判断下列实对称矩阵是否为正定矩阵

（1）（2）（3）

【解答】（1）跟上一题一样，我们来考虑各阶顺序主子式，显然的，有



从而不正定.

（2）考虑各阶顺序主子式，显然的，有



从而正定.

（3）考虑各阶顺序主子式.直接考虑行列式，我们有



考虑消去法，将第一行乘以加到第二行，新的第二行乘以加到第三行，…，将新的第行乘以加到第行，行列式值不变，而原行列式变为



这对于任意均成立，从而有各阶顺序主子式大于零，从而矩阵正定.

【15】讨论参数满足什么条件时，下列二次型是正定二次型：

（1）；

（2）；

（3）；

【解答】

（1）写出二次型矩阵如下



考虑各阶顺序主子式，有



从而可以解出.

（2）写出二次型矩阵如下



考虑各阶顺序主子式，有



从而可以解出.

（3）写出二次型矩阵如下



考虑各阶顺序主子式，有



从而可以解出.

【16】证明实对称矩阵为正定矩阵的充分必要条件为合同于.

【解答】充分性.合同于，即存在可逆矩阵，使得.

则对于任意，因为可逆，故，则



从而矩阵是正定矩阵.

必要性.若为对称正定矩阵，则可以进行Cholesky 分解（把一个对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵和其转置的乘积的分解），即，故我们有



从而合同于.

或者，因为为对称正定矩阵，故的特征值都是正的，其相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵使得



取，则，即合同于.

【17】设为正定矩阵，合同于，证明也是正定矩阵.

【解答】为正定矩阵，故我们对于任意，都有.若合同于，则存在可逆矩阵使得，故此时对于任意，有



因为可逆，故，且也可为任意非零列向量，故矩阵也是正定的.

【18】设和为阶正定矩阵，和为正实数.证明矩阵为正定矩阵.

【解答】这是显然的，我们对于任意，都有，则对于有



故矩阵为正定矩阵.

【19】设为正定矩阵，证明：

（1）都是正定矩阵；

（2）是正定矩阵；

（3）是正定矩阵.

【解答】我们首先证明正定矩阵的和还是正定矩阵.

我们称是正定的当对于任意非零向量都成立.若正定，正定，则对于任意非零向量都有:



显然对于他们的和，我们对于任意非零向量有



从而也是正定的.故我们只需要证明（1）即可得到（2）（3）成立.

（1）矩阵正定，当且仅当的特征值全大于零.则对于，我们根据特征值的性质容易知道它的全部特征值为显然成立. 正定的考虑范围在实对称矩阵内，故我们首先证明是对称矩阵.由于正定，故我们有其对称，则：.故容易得到：



从而是对称矩阵.故矩阵正定.从而（1）（2）（3）得证！

【20】设为实矩阵，证明的充要条件为是正定矩阵.

【解答】

必要性.因为，故是实对称矩阵，又对任意，有



且当且仅当时成立.因为列满秩，从而,故正定.

充分性.设是正定矩阵，则对任意，有



而，故，即对于任意，都有，从而只有零解，即.

【21】设是正定矩阵，证明矩阵是正定矩阵，其中是非零实常数.

【解答】首先证明矩阵是对称矩阵. 是正定矩阵，则是对称矩阵，则有，从而我们有，从而矩阵也实对称.我们接下来考虑的阶顺序主子式，有



第行提出，第列提出，我们有



而显然，由于正定，则有，从而有对于任意都成立，从而矩阵是正定矩阵.

【22】设为实对称矩阵，为实数，证明：充分大之后，矩阵为正定矩阵.

【解答】显然的，有也是实对称矩阵，则我们仅需要考虑矩阵的特征值即可.

考虑矩阵的特征值，则的特征值为，我们只需要足够大的满足，即有的所有特征值全部大于零.从而是正定矩阵.（等价命题：实对称矩阵正定的特征值全部大于零）.

【23】证明：正交矩阵是正定矩阵的充要条件是是单位矩阵.

【解答】先证明充分性，显然是单位矩阵的时候正交，且正定.

下面来证明必要性.如果正定，则存在一个正交矩阵使得



又正交，则正交矩阵的乘积正交，即正交，故



即，则，从而得证.

【24】证明：实对称矩阵是正定矩阵的充要条件为的特征值都大于零.

【证明】必要性.实对称矩阵是正定矩阵，所以二次型为正定型.根据定理“实二次型经非奇异线性替换后正定性不变”可以得到，取正交线性替换，得它的标准二次型



为正定二次型，其中为的特征值.根据课本P223的定理6.5我们可以得到有特征值全部大于零.

充分性.因为矩阵为实对称矩阵，所以存在可逆矩阵使得



当对角线上所有特征值均大于零时，对于任意的非零向量，令，此时一一对应.则.

从而矩阵正定.

【25】设为实对称矩阵，且满足，证明：为正定矩阵.

【解答】假设是矩阵的特征值，则是的特征值，但，的特征值只有，即，从而我们解出矩阵的特征值只有，发现全部大于零，故为正定矩阵.

【26】若为正定矩阵，证明：存在正定矩阵，使.

【解答】为正定矩阵，故存在正交矩阵，使得



其中.于是



其中为正定矩阵，因为其特征值



【27】设为阶实对称矩阵，且，则

（为正整数）

是正定矩阵.

【解答】同【19】（2）.

【28】设是阶实矩阵，如果对于内积



作一个欧氏空间，证明必定为正定矩阵.

【解答】取，则由于



根据对称性，有，即，即是实对称矩阵.从而是二次型的方阵.当时，有



从而正定，从而矩阵是正定的.

【29】已知二次型



的秩为，试求：

（1）参数的值；（2）在正交替换下的标准形.

【解答】（1）我们写出二次型矩阵



因为不是满秩的，故考虑行列式，有



（2）计算正交替换下的标准形，只需要计算矩阵的特征值即可.我们有



计算得到.则.

【30】（第四章【60】）证明：对任何实数和有



【解答】这是维的Cauchy-Schwarz不等式.我们可以构造二次函数来证明，有

则有判别式，从而原命题得证！

【31】设矩阵，试判断二次型是否正定.

【解答】我们有.计算主子式即可判断是否是正定矩阵.我们有



故二次型正定.此题的即是前面【16】中提到的Cholesky 分解.

【32】设为实矩阵，证明：矩阵是正定矩阵的充分必要条件为.

【解答】必要性.若是正定矩阵，则对于任意均有



即，所以，即齐次方程只有零解，故.

充分性.若，则齐次方程只有零解，故对于任意



均有，故，从而矩阵正定.

【33】设和为阶正定矩阵，证明：矩阵为正定矩阵的充分必要条件为.

【解答】和为阶正定矩阵，故.（正定矩阵是对称矩阵）.

证明必要性.此时我们有矩阵为正定矩阵，故



证明充分性.此时有，则有，故矩阵为实对称矩阵.又因为均为正定矩阵，故存在可逆矩阵使得



所以.

记矩阵，则，而为正定矩阵，其特征值都大于零，故的特征值也都大于零，则为正定矩阵.

【34】设和为阶实对称矩阵，并且是正定矩阵，证明：存在阶实可逆矩阵，使得和都是对角阵.

【解答】是正定矩阵，故存在实可逆矩阵使得.对于实对称矩阵，存在正交矩阵，使得为对角矩阵.令，则是实可逆矩阵，且我们有



均为对角阵.

【35】设和为阶正定矩阵，且方程的根是.证明：.

【解答】矩阵正定，则存在可逆矩阵满足，而又有正定，故矩阵也是正定矩阵，因此



因为可逆，故，故与同根.若方程的根是，则方程的根为，即与相似，因此，从而，故.

【36】设二次型



已知，试求

（1）参数的值；（2）正交替换，将化为标准形；

（3）的解.

【解答】（1）二次型的矩阵为



进行矩阵变换有，，故.

（2）考虑配方，我们有



故令即可，二次型变为



所用到的正交替换为



容易验证所用到的替换是正交替换，写出矩阵即可.

（3）根据，可以知道



则将解记为，我们变换回到即可.有



【37】用正交替换化二次型



为标准形.

【解答】写出矩阵，有



容易知道一个特征值为，因为此时有



注意到此时矩阵的秩为，故几何重数为.代数重数大于几何重数，故特征值要么全为，要么有一个不为.容易得到还有一个特征值为，可以通过矩阵变换从行列式得到，此处不做证明.则我们得到对应于的特征向量为



一共为个.



的一个解向量就是对应于的特征向量.有是符合要求的解.

故我们得到了所需要的个线性无关的向量：



我们可以考虑对这些向量进行一些操作.进行施密特正交化，有



然后进行正交化，可以得到



这些向量都与正交，故我们得到了相互正交的个线性无关向量，得到了正交替换矩阵如下：



则正交替换为



得到的标准形为.

【38】设矩阵是正定矩阵，证明：二次型



是负定二次型.

【解答】因为正定，故我们有，故根据行列式的第一降价定理（P76例2.41），我们有



因为是正定阵，故可以分解为，从而



故也是正定阵.从而是正定二次型，而，故



是负定二次型.

【39】证明：能分解为两个实一次齐次式乘积的充要条件是的秩为，且符号差，或者的秩为.

【解答】设，若与线性无关，不妨设与不成比例，于是线性代换



是非退化的，且二次型，再令



于是得到，显然的秩为，符号差为.

若与线性相关，可设



则，因为是一次齐式，可以假定，作非退化线性替换



化为二次型，即的秩为.

而若的秩为，且符号差，则，所以是的两个一次齐次式的乘积，其中.

若的秩为，则，其中，为的一次齐次式.所以



综上，命题得证！

【40】设是标准正交列向量组，为实数，矩阵，证明：

（1）是实对称矩阵；

（2）是的特征向量，并求出其对应的特征值；

（3）也是的特征向量，并求出它们对应的特征值；

（4）或时，为正交矩阵；

（5）时，为可逆矩阵；

（6）时，为正定矩阵.

【解答】（1）我们有



故是实对称矩阵.

（2）标准正交列向量组，故.我们有



故是特征向量，且其对应的特征值为.

（3）因为正交，故我们有.我们有



故也是的特征向量，对应的特征值为.

（4），显然为正交矩阵；时，我们有



故



（5）根据（2）（3）可知矩阵的特征值为，其中是一重特征值，是重特征值.为了满足可逆，即需要其行列式不为零，即特征值不能为，故，从而.

（6）是标准正交列向量组，故任意非零向量均可表示为



的形式.则我们有



当时，显然有，故矩阵正定.